Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Troisième séance d'exercices –

connexions et tenseur de Riemann

« *Aide-mémoire* »

1 Transport parallèle et connexions

Soit $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteurs sur une variété $\mathcal{M}$. Dans une carte locale, on définit le **transport parallèle** de X du point P (de coordonnées x^α) vers le point $P' \in \mathcal{M}$ (de coordonnées $x^\alpha + \Sigma^\alpha$) comme (P et P' sont supposés infinitésimalement proches) :

$$\tilde{X}^\alpha(x+\Sigma) = X^\alpha(x) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) X^\beta(x) \Sigma^\gamma.$$

Ceci nous permet de définir la **dérivée covariante** de X dans la direction Y :

$$\begin{aligned}(\nabla_Y X)^\mu &= \lim_{\Sigma\to 0} \frac{X^\mu(x^\alpha + \Sigma Y^\alpha) - \tilde{X}^\mu(x^\alpha + \Sigma Y^\alpha)}{\Sigma} \\ &= Y^\alpha \Big(\partial_\alpha X^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} X^\beta\Big).\end{aligned}$$

Tout ceci coïncide bien avec la définition formelle d'une connexion affine donnée au cours. Plus généralement, la dérivée covariante d'un tenseur T de rang (m,n) dans la direction ∂_γ est notée $\nabla_\gamma T$. Ses composantes sont

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_n} = T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_n,\gamma} &+ \Gamma^{\alpha_1}_{\lambda\gamma} T^{\lambda\alpha_2\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_n} + \ldots + \Gamma^{\alpha_m}_{\lambda\gamma} T^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\lambda}{}_{\beta_1\ldots\beta_n} \\ &- \Gamma^\lambda_{\beta_1\gamma} T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\lambda\beta_2\ldots\beta_n} - \ldots - \Gamma^\lambda_{\beta_n\gamma} T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}\lambda}.\end{aligned}$$

Sur une variété (pseudo-)Riemannienne, l'unique connexion **métrique** (c-à-d qui préserve le produit scalaire défini par la métrique) et **sans torsion** (c-à-d $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$) est la connexion de Levi-Civita. Ses coefficients de connexion sont parfois appelés **symboles de Christoffel** et sont donnés par

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}).$$

En un point donné, on peut toujours annuler ces coefficients par un choix de coordonnées approprié.

2 Tenseur de Riemann

Le tenseur de Riemann est défini comme l'application

$$\begin{aligned}R &: \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ &: (X,Y,Z) \mapsto R(Z,X,Y) \triangleq \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,\end{aligned}$$

Dans une carte locale, ses composantes sont

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} + \Gamma^\rho_{\gamma\alpha}\Gamma^\mu_{\beta\rho} - (\beta \leftrightarrow \gamma).$$

Quelques propriétés :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \qquad R^\alpha{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0, \qquad \nabla_{[\mu} R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0.$$

Interprétation géométrique du tenseur de Riemann : *c.f.* cours et exercices.